Der Computer im Stochastikunterricht

Der Einsatz des Computers im Stochastikunterricht ist angebracht, wenn

- große Datenmengen eine manuelle Bearbeitung schwer machen (z.B. wiederholtes Durchführen eines Zufallsexperiments)
- Zufallsexperimente zur Überprüfung der theoretischen Werte simuliert werden sollen (z.B. Überprüfung von Testergebnissen).
- experimentelles Vorgehen angesagt ist (z.B. bei der Suche nach der Grenze des Verwerfungsbereichs bei gegebenem Fehler 1. Art)
- graphische Darstellungen manipuliert werden sollen (z.B. Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung).

Dieser Beitrag will Anregungen und Hilfen geben für den Computereinsatz im Stochastikunterricht.
Der Computer ist als punktuelle Stütze gedacht. Wo die herkömmlichen Wege und Mittel den Schülern manche Situationen aus der Stochastik nur auf unzulängliche Weise erfahrbar machen können, erscheint es angebracht, die spezifischen Möglichkeiten des Computers zu nutzen.
Im folgenden werden diejenigen Themen aufgegriffen, bei denen sich der Einsatz des Computers im Unterricht anbietet. Das Programm kann sowohl zur Demonstration eingesetzt werden, als auch die Schüler selbst forschen lassen. In letzterem Fall sollten sie durch ein Arbeitsblatt geführt werden.

Das Programm „Stochastik“

Möglichkeiten des Programms

Das speziell für den Stochastikunterricht entwickelte Programm "Stochastik" ist sehr einfach zu bedienen. Da außerdem eine kontextsensitive Hilfe eingebaut ist, genügt an dieser Stelle eine kurze Beschreibung:
Das Programm ermöglicht das Berechnen theoretischer Wahrscheinlichkeitswerte und auch das Simulieren von Zufallsexperimenten. In den Fenstern können Wertetabellen und Schaubilder wieder gegeben werden.
Wahrscheinlichkeitsverteilungen können von einem Fenster ins andere kopiert werden und lassen sich z.B. auch im gleichen Fenster überlagern.

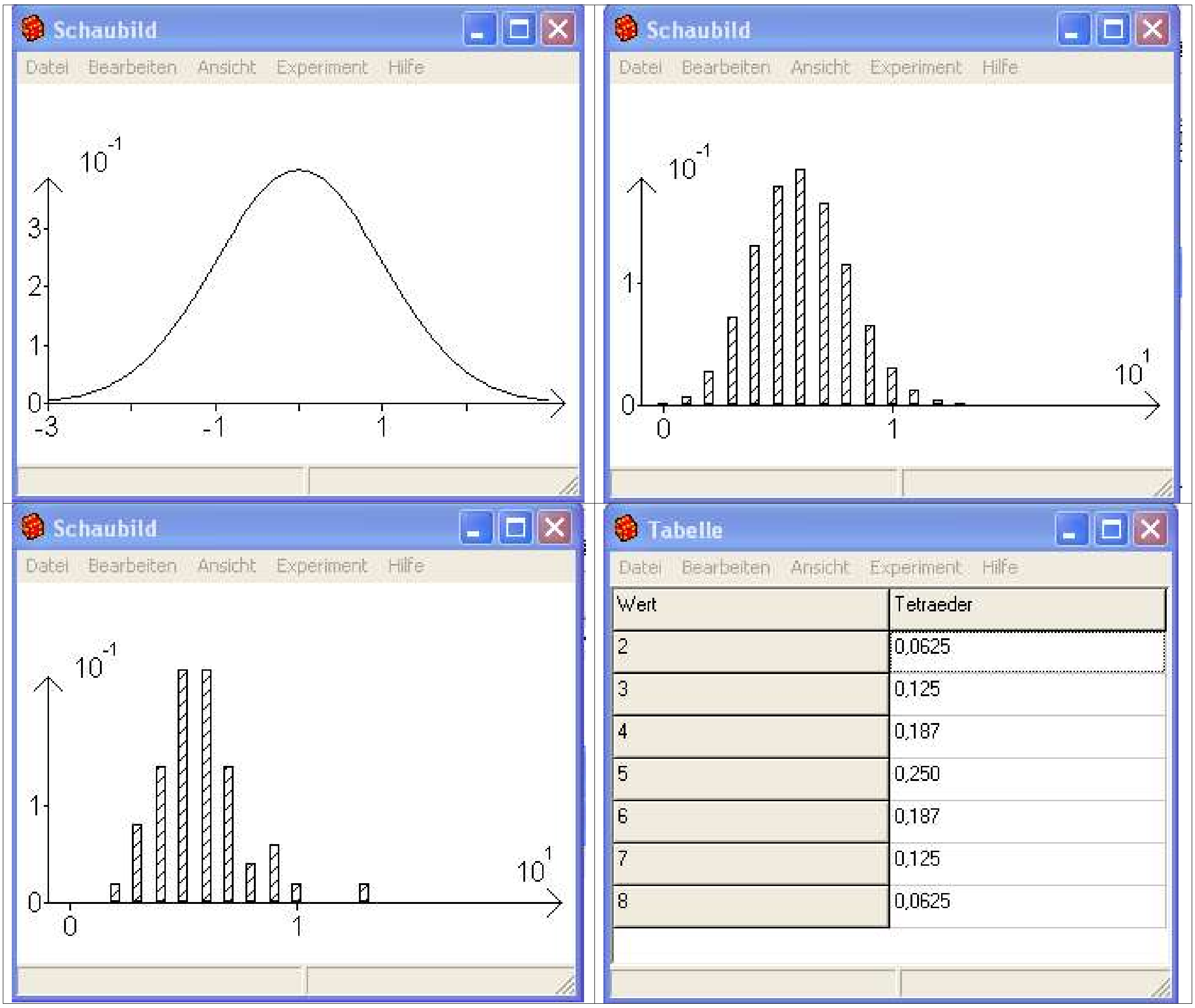


Abb. 1: oben links: Normalverteilung H(0,1), dargestellt im Bereich -3 < x < 3
oben rechts: Binomialverteilung B(20;0,3), dargestellt im Bereich 0..20
unten links: Binomialverteilung B(20;0.3), 50 Simulationen, dargestellt im Bereich 0..20
unten rechts: Augensumme beim 2-maligen Werfen eines idealen Tetraeders

Einführung in das Programm "Stochastik"

In jedem Fenster werden im Menübalken mit mehreren Menüs angeboten:

Datei Bearbeiten Ansicht Experiment Hilfe

Das Datei-Menü
Neu
Es wird entweder der Inhalt des aktuellen Fensters gelöscht oder ein neues Fenster geöffnet, in das dann neue Daten eingetragen werden können.

Öffnen
Sie können eine vorhandene Datei im aktuellen Fenster öffnen - die aktuelle Datei wird automatisch geschlossen. Oder Sie können eine vorhandene datei in einem neuen Fenster öffnen.

Speichern
Hier speichern Sie eine Datei mit der Endung exp. Ist schon ein Dateiname vergeben, dann wird dieser verwendet.

Speichern unter
Hier speichern Sie die Datei unter einem von Ihnen zu vergebenden Namen mit der Endung exp.

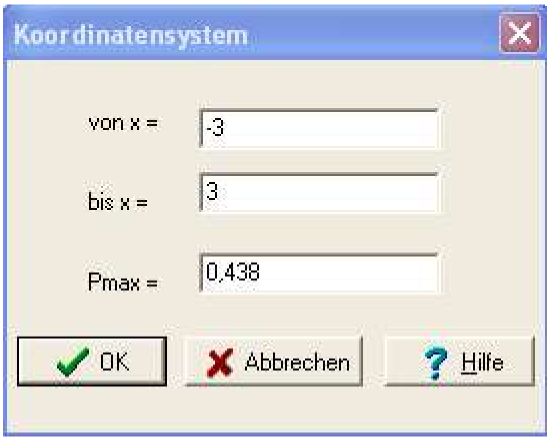
Schließen
Das aktuelle Fenster wird geschlossen. Nicht gespeicherte Daten müssen zuerst gespeichert werden.

Drucken
Sie können eine Schaubild oder eine Tabelle ausdrucken. Es wird kein Dialogfenster angezeigt, sondern der Ausdruck sofort gestartet.

Druckereinrichtung
Hier stellen Sie den Drucker ein.

Beenden

Hier schließen Sie alle Fenster und beenden das Programm. Es können evtl. mehrere Rückfragen zum Speichern der Daten kommen, da jedes Fenster gespeichert werden muss.



In ein Fenster können mehrere Experimente geladen werden. Unter Umständen muss man den angezeigten Koordinatenbereich anpassen, damit alle Experimente im Fenster dargestellt werden können. Dies kann jeweils bei der Erstellung eines neuen Experiments erfolgen oder durch Anwählen von 'Koordinatensystem' aus dem Menü 'Ansicht'.

Abb.2: Festlegung des anzuzeigenden Koordinatenbereichs

Das Bearbeiten-Menü
Hier finden Sie die üblichen Zwischenablage-Funktionen.
Da in einem Fenster mehrere Zufallsvariablen dargestellt werden können, wählen Sie in diesem Fall über ein Zwischenfenster die Variable aus, die ausgeschnitten, kopiert oder gelöscht werden soll. Es können immer nur eine oder alle Variablen ausgewählt werden.
Beachten Sie bei Simulationen, dass nur die Beschreibung der Simulation in die Zwischenablage übertragen wird. Beim Einfügen wird also neu simuliert. Dies ist eine geschickte Methode schnell mehrere gleichartige Simulationen in ein Fenster einzutragen.

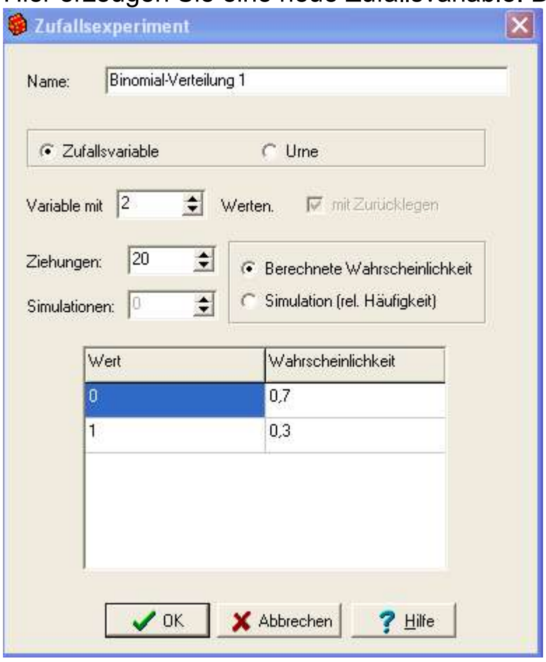
Die Daten sind auch in anderen Programmen nutzbar. Sie werden bei einer Tabelle auch als Text, mit Strichpunkten getrennt, und bei einem Schaubild als Grafik und Bitmap in die Zwischenablage gelegt. Dies bietet die Möglichkeit, sich z.B. mit einer Textverarbeitung ein Protokoll anzufertigen.

Als Besonderheit ist der Export der Daten eines Fensters nach Excel möglich. Dazu benötigen Sie natürlich das Programm Excel. Dieses wird, falls vorhanden, geöffnet und die Daten in Spalten einer Excel-Tabelle eingetragen. Dort können die Daten dann weiterverarbeitet werden.

Das Ansicht-Menü
Die berechneten bzw. simulierten Daten können als Tabelle oder als Schaubild dargestellt werden. Die ausgewählte Darstellungsart ist im Menü mit einem Haken versehen.
Wurde die Darstellungsform Schaubild gewählt, dann kann man über den Menüpunkt Koordinatensystem die Achsen individuell einstellen.

Das Experiment-Menü

Neu
Hier erzeugen Sie eine neue Zufallsvariable. Diese kann diskret oder stetig sein.



Diskrete Zufallsvariable

In diesem Fenster stellen Sie die Eigenschaften einer Zufallsvariablen ein.

Geben Sie der Zufallsvariablen einen sprechenden Namen.

Sie können wählen, ob Sie eine Zufallsvariable mit einer Wahrscheinlichkeitsverteilung oder eine Urne mit Kugeln darstellen wollen.

Geben Sie dann ein, wie viel verschiedene Werte die Zufallsvariable annehmen kann, bzw. wie viele Kugelsorten in der Urne sein sollen.

Bei einer Urne können Sie noch entscheiden, ob die Ziehungen mit oder ohne Zurücklegen stattfinden sollen.

Abb.2: Binomialverteilung

Jetzt legen Sie fest, wie viel Ziehungen stattfinden sollen. Außerdem entscheiden Sie, ob das Experiment simuliert werden soll, oder die Wahrscheinlichkeit für jeden Ausgang berechnet werden soll.
Im Falle einer Simulation müssen Sie noch angeben, wie viele Simulationen ausgeführt werden sollen. Es wird dann die relative Häufigkeit für diese Anzahl dargestellt.

In der Tabelle können Sie in der linken Spalte der Zufallsvariablen bzw. der Kugel einen Wert geben und in der rechten Spalte die zugehörige Wahrscheinlichkeit (bei der Zufallsvariablen) bzw. die Anzahl der Kugeln dieser Sorte (bei der Urne) eingeben.
Beachten Sie, dass das Programm mit dem Wert 1 beginnt. Bei Binomialverteilungen (2 Werte) nimmt man meisten die Werte 0 und 1, deshalb sind diese für 2 Werte voreingestellt.

Wenn Sie die OK-Taste drücken, wird zuerst überprüft, ob die Eingaben sinnvoll sind. Dann wird die Rechnung durchgeführt. Bei großen Zahlen kann das sehr lange dauern, also nicht übertreiben!

Dann wird Ihnen ein passendes Koordinatensystem vorgeschlagen.

Stetige Zufallsvariable
In diesem Fenster stellen Sie die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsverteilung ein.

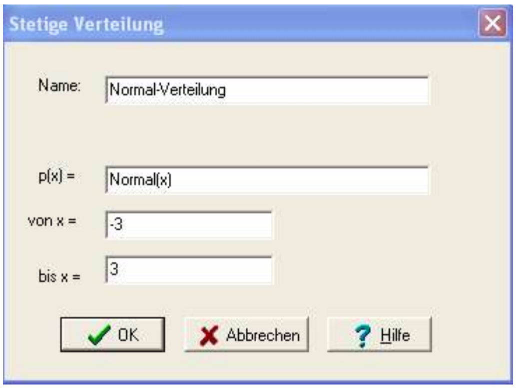


Abb.3 Normalverteilung

Geben Sie der Verteilung einen sprechenden Namen.

Nun geben Sie den Funktionsterm in x ein:

Bsp.: 3*sin(x)+2*cos(x)
exp(x)

Besonderheit: Normal(x) ist der Term der Normalverteilung. Es gilt also
Normal(x) = 1/sqrt(6,28)*exp(-0,5*x*x)

Es sind folgende Operatoren definiert:

+ , - , * , / die 4 Grundrechenarten,
^ für Potenzieren, sowie die Funktionen
sin(x),cos(x),arctan(x) trigonometrische Funktionen,
exp(x) Exponentialfunktion zur Basis e,
ln(x) Logarithmusfunktion zur Basis e,
sqr(x) Quadratfunktion (x*x),
sqrt(x) Quadratwurzelfunktion,

frac(x) Nachkommateil von x,
int(x) Vorkommateil von x,
abs(x) Absolutbetrag von x.

Nun geben Sie noch den Bereich an, in dem gerechnet werden soll. Beachten Sie nicht definierte Werte!

Bearbeiten
Falls mehrere Zufallsvariablen im Fenster dargestellt sind, wählen Sie zuerste eine der Variablen aus. Dann öffnet sich ein Fenster, in dem Sie die Eigenschaften dieser Variablen ändern können.

Testen
Hier können Sie einen linksseitigen, rechtsseitigen oder beidseitigen Test einer Zufallsvariablen ausführen. Sind mehrere vorhanden, dann muss diese erst ausgewählt werden.

Drücken Sie die linke Maustaste im Schaubild auf der senkrechten Linie und verschieben Sie die Linie mit gedrückter Maustaste. Am unteren linken bzw. rechten Rand sehen Sie das Ergebnis für einen linksseitigen bzw. rechtsseitigen Test mit dieser Grenze. Durch Addition der beiden Werte erhalten Sie (von Hand) den beidseitigen Test.
Wenn der Test beendet werden soll, dann wählen Sie den Menüpunkt Testen ein zweites Mal aus.
Man kann auch in einer Tabelle Tests ausführen.

Statistik
Es werden die statistischen Werte der ausgewählten Zufallsvariabeln angezeigt. Diese benötigen Sie, um z.B. eine Binomialverteilung durch eine Normalverteilung anzunähern.

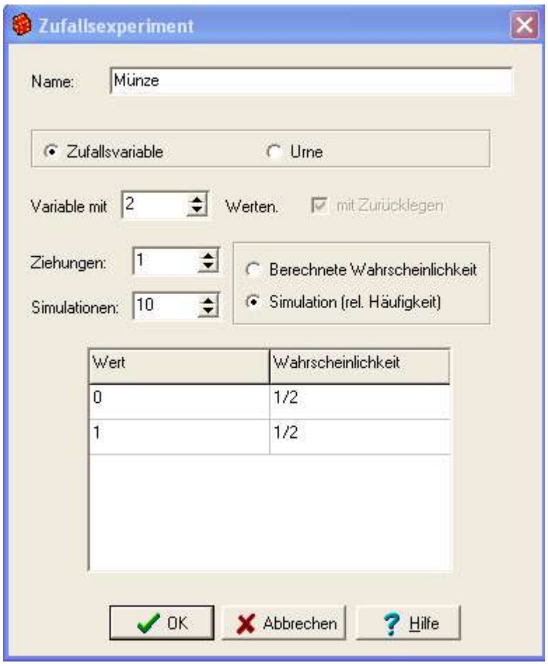
Abb.4: Statistik

Einsatzbeispiele

Von der relativen Häufigkeit zur Wahrscheinlichkeit

Bemerkungen
Infolge der hohen Rechengeschwindigkeit lassen sich viele Zufallsexperimente sehr oft simulieren und die Ergebnisse statistisch erfassen. So kann genügend statistisches Material durch die Schüler experimentell zusammengetragen werden, unter besonderer Beachtung der absoluten und der relativen Häufigkeiten des Eintretens bestimmter Ereignisse. Durch aufmerksame Untersuchungen lassen sich die Rechenregeln für die relativen Häufigkeiten herausfiltern.
Da leicht eine Vielzahl von Durchführungen eines Experiments möglich ist, erleben die Schüler, dass es bezüglich eines Zufallsexperiments ein Maß dafür gibt, wie sicher mit dem Eintreten eines Ereignisses A zu rechnen ist. Die Nähe der Zahl P(A) zu h(A) erscheint hier deutlich genug. So wird den Schülern das Wahrscheinlichkeitsmodell mit seinen zu den relativen Häufigkeiten analogen Rechenregeln plausibel erscheinen.

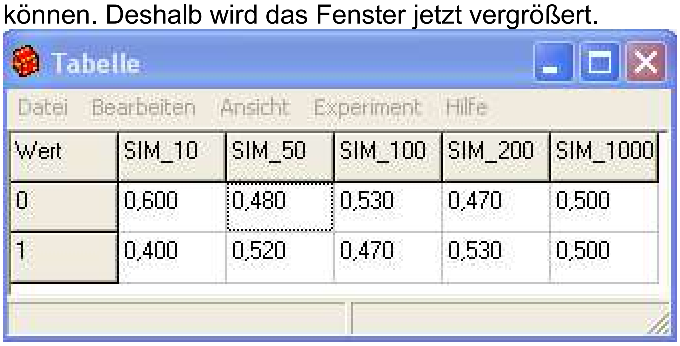
Erster Einsatz von "Stochastik" im Unterricht: Werfen einer Münze
Zur Durchführung des Experiments "Einmal werfen" gehört die Ergebnismenge Ω = {Zahl,Wappen} oder codiert Ω = {0;1}.
Zunächst wird das Experiment definiert unter Auswahl des Menüpunktes "Experiment". Im Pulldownfenster wird "Neu/diskret" ausgewählt. Unser Experiment besitzt 2 Ausprägungen, nämlich "Zahl" oder "Wappen". Wir wählen also Zufallsvariable mit 2 Werten. In der Tabelle stehen in Zahlform die Ausprägungen "0" und "1". Im Feld "Wiederholungen" wird die Zahl "1" eingetragen und damit das Experiment "Einmal werfen" festgelegt. Das Feld "Wie viel Simulationen" erlaubt es, die Zahl der Simulationen zu ändern. Die Inhalte der p-Felder können zunächst als ein Maß für die Beschaffenheit der Münze gedeutet werden. Selbstverständlich möchte man mit einer idealen Münze experimentieren, die gleiche Chancen für Zahl oder Wappen erwarten lässt (Abb. 5).



Die Schüler sollten nun Versuche durchführen und dabei die Anzahl der Simulationen verändern. Zuerst sollten Serien mit derselben Simulationszahl verglichen werden. Es stehen ja mehrere Fenster für Diagramme zur Verfügung. Jede Serie zeitigt möglicherweise andere Häufigkeiten.

Abb. 5 Münzwurf

Um das Ergebnis des Experiments zahlenmäßig zu erhalten, muss es in der Ansicht "Tabelle" eingerichtet werden. Im übrigen sind dafür dieselben Maßnahmen zu treffen wie oben. Die Tabellenform hat außerdem den Vorzug, verschiedene Simulationen nebeneinander darstellen zu können. Deshalb wird das Fenster jetzt vergrößert.



Wert	SIM_10	SIM_50	SIM_100	SIM_200	SIM_1000
0	0,600	0,480	0,530	0,470	0,500
1	0,400	0,520	0,470	0,530	0,500

Abb.6 Münzwurf

Im folgenden sollen die Schrittfolgen zum Einrichten dieser Tabelle im einzelnen angegeben werden:

- Erstes Experiment wie bekannt einrichten;
  Name: SIM_10; Simulationen: 10; OK.
- Zweites Experiment in demselben Tabellenfenster auf bekanntem Weg neu einrichten.
  Name: SIM_50; Simulationen: 50; OK.
  Die Ergebnisse des ersten Experiments bleiben erhalten.
- Das dritte und die folgenden Experimente werden analog wie oben initialisiert.

Der Verlauf der Simulationen gestattet hinsichtlich der relativen Häufigkeit eines Ereignisses A bis jetzt die Feststellungen, dass $0 \leq h(A) \leq 1$ und $h(\neg A) = 1 - h(A)$ gilt. Die Tabellen zeigen auch: $h(\Omega) = 1$. Darüber hinaus ist ein gewisser Stabilisierung--Effekt mit zunehmender Zahl von Simulationen nicht zu übersehen.

Werfen eines Würfels

Das Zufallsexperiment sei durch "Einmal werfen" festgelegt. Die Ergebnismenge ist $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$. Beim Neueinrichten wird Variable mit 6 Werten eingetragen. Das Fenster richtet sich von selbst auf die neue Situation ein und zeigt 6 Ausprägungsfelder mit den werten "1" bis "6" an. Die Wahrscheinlichkeits-Felder besagen, dass ein idealer Würfel angeboten wird.
Idealer Würfel 1x werfen; 50x simulieren.
Zunächst sollten Diagramme für verschiedene Anzahlen von Simulationen erzeugt werden. Ist das erste Würfelexperiment definiert, so kann man es mit Hilfe der "Zwischenablage" bequem auf ein der

anderes Fenster übertragen und dort editieren. Zum Beispiel soll der Inhalt eines Fensters in ein anderes transferiert werden:
Im Ausgangsfenster: Datei/Neu/in neuem Fenster wählen. Bearbeiten/Kopieren
Im neuen Fenster: Bearbeiten einfügen.

Damit befindet sich eine Kopie des angelegten Experiments im zweiten Fenster und kann dort wunschgemäß editiert werden. Die nächste Abbildung zeigt ein mögliches Ergebnis

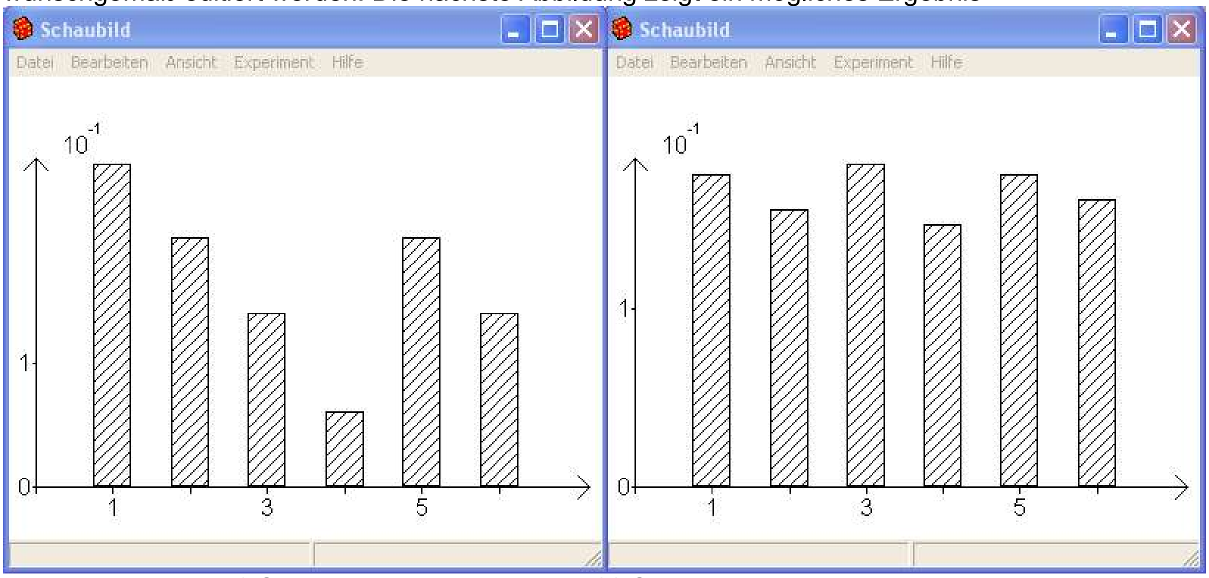


Abb.7: linkes Bild: 50 Simulationen; rechtes Bild: 500 Simulationen

Die Simulationen bestätigen, dass auch ein idealer Würfel auf eine gewünschte Augenzahl warten lässt (vgl. oben: Augenzahl 2). Erst lange Serien vermitteln einen Stabilisierungseffekt. Deshalb ist es wünschenswert, eine Tabelle für Simulationen anzulegen.

Tabelle

Datei Bearbeiten Ansicht Experiment Hilfe

Wert	Sim_100	Sim_200	Sim_300	Sim_400
1	0,110	0,195	0,203	0,152
2	0,140	0,165	0,153	0,155
3	0,220	0,155	0,166	0,182
4	0,200	0,135	0,136	0,200
5	0,150	0,155	0,170	0,145
6	0,180	0,195	0,170	0,165

Abb. 8 Würfel- Simulation

Aus dieser Tabelle können weitere Gesetzmäßigkeiten für relative Häufigkeiten abgelesen werden. Man kann zum Beispiel die Ereignisse $A = \{1,2\}$, $B = \{3,4\}$, $C = \{2,3,4\}$ herausgreifen und folgende relativen Häufigkeiten betrachten und vergleichen:

$h(A)$	$h(A \cup B)$	$h(A) + h(B)$	$h(\neg A)$
$h(B)$	$h(A \cup C)$	$h(A) + h(C)$	$h(\Omega\setminus\{6\})$
$h(C)$			

Eine Beurteilung der Ergebnisse weist die Schüler auf ein Regelsystem für die relativen Häufigkeiten hin; das in seinen Grundzügen bereits festgehalten werden kann.

Ziehen aus einer Urne (10 Kugeln, davon 4 schwarz, 6 rot)

Aus der Urne wird dreimal mit Zurücklegen eine Kugel entnommen und danach die Anzahl A(n) der gezogenen roten festgestellt. Die Rechenregeln für die relativen Häufigkeiten dürften sich schon deutlich herauskristallisiert haben. Deshalb kann man mit dieser Simulation des Experiments den Blick schon mit Bedacht auf das Vorhandensein einer Maßzahl richten, die augenscheinlich zu einem bestimmten Ereignis gehört.
Die Durchführung verschiedener Simulationen kann die früheren Erfahrungen nur noch unterstreichen. Im Gegensatz zu den vorigen Experimenten wird bei der Einrichtung eines Urnenexperiments Urbe angekreuzt. Das Ergebnis "schwarze Kugel" wird mit "0", das Ergebnis "rote Kugel" mit "1" codiert. Eine ausführliche Beschreibung zur Handhabung des Urnenmodells folgt im nächsten Abschnitt.
Bei der Durchführung des Experiments wird die Anzahl der gezogenen roten Kugeln registriert. Das nebenstehende Schaubild ist die Wiedergabe der relativen Häufigkeiten nach 100 Simulationen des Experiments (Abb. 9).

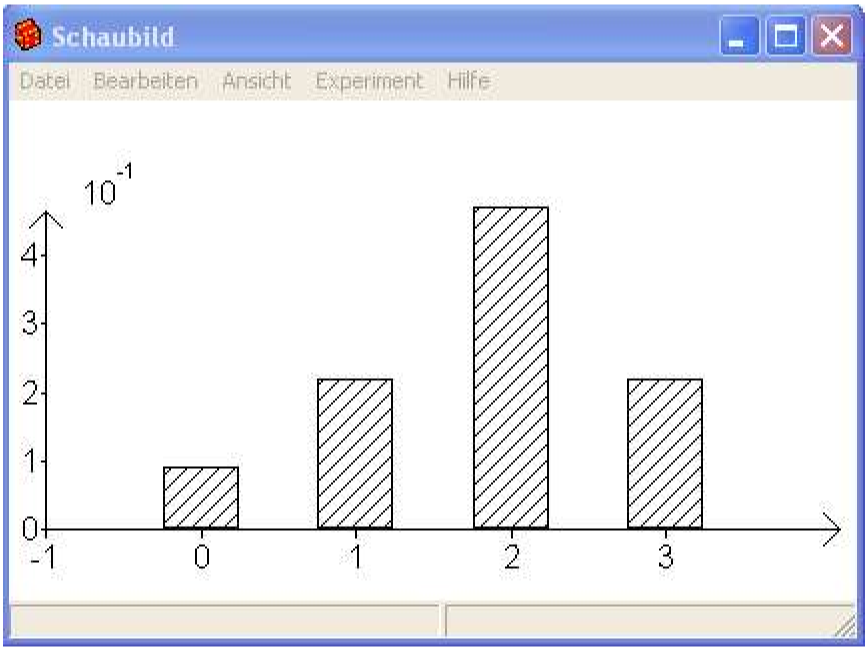


Abb.9: 3 Ziehungen aus 4 schwarzen(0) und 6 roten (1) Kugeln.

Die Tabelle (Abb. 10) präsentiert die Ergebnisse aus unterschiedlich vielen Simulationen. Bei geeigneter Wahl der Ereignisse erfährt das Regelwerk nochmals eine experimentelle Bestätigung. Man wähle beispielsweise
A : höchstens einmal rot, B : dreimal rot, C : mindestens einmal rot und untersuche unter anderem h(A U B), h(A U C), h(¬C).

Tabelle

Datei Bearbeiten Ansicht Experiment Hilfe

Wert	Sim_10	Sim_100	Sim_500	Sim_1000
0	0	0,0800	0,0640	0,0600
1	0,400	0,330	0,276	0,280
2	0,400	0,420	0,424	0,444
3	0,200	0,170	0,236	0,216

Abb. 10 Urne wie in Abb.9

Zum Abschluss dieses Themenbereichs kann eine Schülerübung angesetzt werden mit der Zielrichtung: Suche nach einem Maß; das angibt, wie sicher bei einem Zufallsexperiment mit dem Eintreten Ereignisses A zu rechnen ist.

In einer Versuchsserie simulieren die Schüler folgendes Experiment:
Idealer Würfel n-mal geworfen, relative Häufigkeit mit der das Ereignis A = {6} eintritt wird mit $h_n(A)$ bezeichnet und in Abhängigkeit von n grafisch dargestellt.

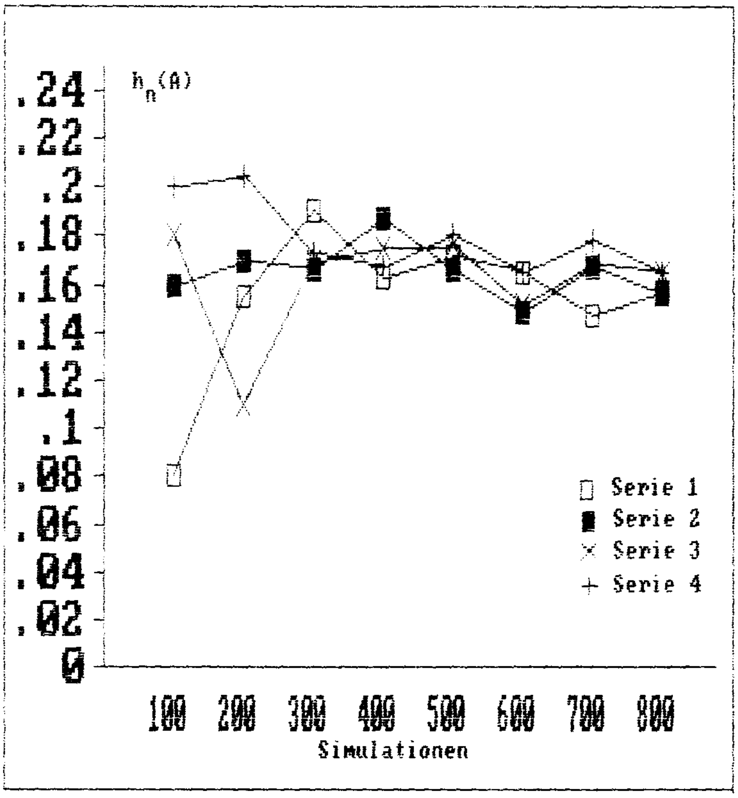


Abb.11

Als ein Ergebnis kann das empirische Gesetz der großen Zahlen herausgefiltert werden:
Mit wachsendem n schwanken die relativen Häufigkeiten $h_n(A)$ immer weniger um eine gewisse Zahl p. Mit großer Sicherheit ist $h_n(A)$ für großes n eine gute Näherung für p. Dabei besagt die Zahl p, dass in einer langen Versuchsserie das Ereignis A ungefähr n*p-mal eintreten wird.
Die Simulation eines Modells für ein praktisches Problem ist zu einer bedeutsamen Untersuchungsmethode in vielen Wissenschafts-Disziplinen geworden. Deshalb sollte zur Einführung in die Methoden der Stochastik den Schülern genügend Zeit zum Experimentieren und zum Nachüberlegen gelassen werden. Zwei Unterrichtsstunden scheinen für die vorgestellten Beispiele angemessen zu sein. Der Übergang zu einem Wahrscheinlichkeitsmodell, bei Anlehnung an die gefundenen Regeln für relative Häufigkeiten, dürfte danach hinreichend vorbereitet sein.

Simulation und Berechnung von Zufallsexperimenten

Das Urnenmodell
Zufallsexperimente im Stochastikunterricht besitzen eine mannigfache textliche Einkleidung. Für die Schüler ist es hilfreich, wenn die Experimente auf ein Grundmuster zurückgeführt werden. Ist für ein Zufallsexperiment $\Omega = \{\alpha_1 , ... , \alpha_n\}$ die Ergebnismenge und gilt für P ($\{\alpha_1\} = a_1/b$ (i=1,..., n), so kann es durch ein Urnenmodell mit b Kugeln ersetzt werden. Die Wahrscheinlichkeiten $P(\alpha_i\}$ der Elementarereignisse müssen nicht gleich sein. Zunächst ist es aber nahe liegend, Würfelexperimente mit Hilfe eines Urnenmodells zu realisieren. Zum Werfen eines idealen Würfels mit Feststellen der Augenzahl gehören die Wahrscheinlichkeiten $P(\alpha_i)= 1/6 = (1k)/(6k)$ (i = l,...,6; $k \in N$). Also kann das Würfelexperiment mit Hilfe eines Urnenmodells verwirklicht werden. Die Urne enthält mit den Ziffern 1 bis 6 gekennzeichnete Kugeln, von jeder Sorte gleichviel, insgesamt 6k Kugeln. "Stochastik" erwartet den Eintrag der passenden Anzahlen der Kugeln in die "Anzahl-Felder". Nach Auswahl von „Urne“ wird dies in der Tabelle automatisch als Überschrift eingetragen.. Die Option "Wiederholungen" erhält den Eintrag "1".
Für ein anderes Würfelexperiment gelte die Vereinbarung: ein idealer Würfel werde dreimal geworfen. Anschließend bilde man die Augensumme. Um ein passendes Urnenmodell mit "Stochastik" zu

realisieren, erhält die Option "Wiederholungen" den Eintrag "3". Wird außerdem "Ziehen mit Zurücklegen" gewählt, simuliert "Stochastik" das dreimalige Würfeln und addiert die Augenzahlen. In der. Folge kann die Häufigkeitsverteilung der Augensummen der ausgeführten Simulationen dargestellt werden. Bei der Einstellung „Wahrscheinlichkeit berechnen“ berechnet "Stochastik" die entsprechende Wahrscheinlichkeitsverteilung der Augensummen.
Schüler können mit dem Urnenmodell auch solche Experimente simulieren, deren Ausgang sich ihrem Erfahrungsbereich bisher entzogen hatte. Die im folgenden beschriebenen Beispiele sollen zeigen, wie das Urnenmodell gerade auch experimentell zum besseren Verständnis typischer Problemstellungen eingesetzt werden :

Urnenexperimente

Beispiel 1

In einer Urne befinden sich 3 weiße, 6 rote und 1 schwarze Kugel. Für ein Glücksspiel wird der folgende Gewinnplan festgelegt: Der Spieler zieht ohne Zurücklegen 2 Kugeln und erhält für jede weiße Kugel 2 DM, für jede rote Kugel 1 DM. Befindet sich unter den gezogenen Kugeln eine schwarze, dann kostet dieser Zug den Spieler 2 DM. Welche Wahrscheinlichkeitsverteilung für den "Gewinn" des Spielers ergibt sich?
Als Modell wähle man eine Urne mit 3 weißen und 6 roten Kugeln und einer schwarzen Kugel mit den entsprechenden Wertbelegungen , +1 bzw. -2.

Abb.12 Urnenexperiment ohne Zurücklegen

Es ist jetzt möglich, die durch die Simulation gewonnenen Ergebnisse den theoretischen gegenüberzustellen. Die letzteren können die Schüler, wenn nicht durch eigene Leistung, dann mit Hilfe des Programms "Stochastik" ermitteln. Darüber hinaus kann aus dem Menü "Experiment" die Option "Statistik" gerufen werden, und man erhält Auskunft über Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung.

Beispiel 2

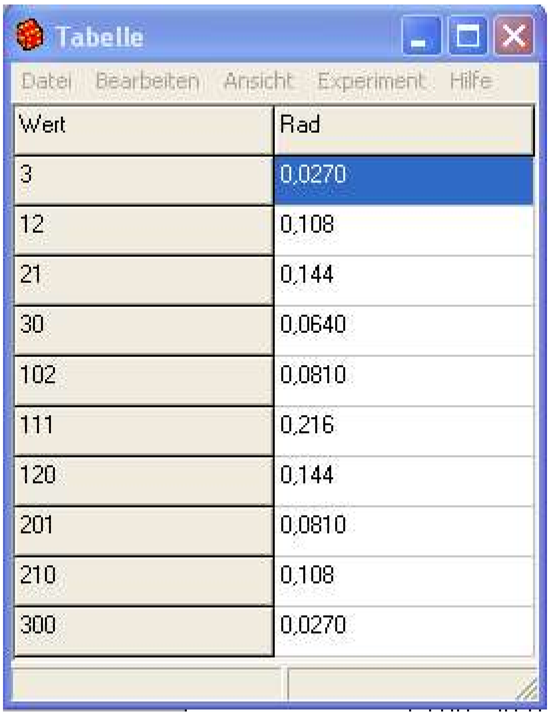
Ein Punkt befinde sich zum Zeitpunkt 0 im Nullpunkt der Zahlengeraden. Innerhalb einer Sekunde bewegt sich dieser Punkt mit der Wahrscheinlichkeit 0,5 auf der Zahlengerade um 1 nach rechts und mit derselben Wahrscheinlichkeit um 1 nach links. Die Zufallsvariable X gibt die Lage des Punktes nach 6 Sekunden an. Gib die Wahrscheinlichkeitsverteilung von X an.

Ein geeignetes Modell erhält man mit einer Urne, in der sich Kugeln befinden, die mit "-1" bzw. mit "+1" beschriftet sind, gleich viele von jeder Sorte. Um eine Bernoullikette zu realisieren, werde wiederholt, entsprechend der Aufgabe sechsmal, mit Zurücklegen eine Kugel gezogen

Abb. 13 Urnenmodell zu Bespiel 2

Beispiel 3

Ein Glücksrad besitzt 10 gleich große verschiedenfarbige Sektoren: 3 weiße, 4 rote und 3 schwarze Sektoren.
(a) Es wird 3-mal gedreht. Zu bestimmen sind die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse
A: die 3 Sektoren haben die gleiche Farbe
B: die 3 Sektoren zeigen verschiedene Farben
(b)Das Rad wird 20-mal gedreht. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit., dass höchstens 6-mal "rot" angezeigt wird?
Aufgaben über das Glücksrad sind stark verbreitet. Mit Einschränkungen lassen sich mit "Stochastik" Glücksradexperimente durch passende Urnenexperimente simulieren.



Tabelle

Datei Bearbeiten Ansicht Experiment Hilfe

Wert	Rad
3	0,0270
12	0,108
21	0,144
30	0,0640
102	0,0810
111	0,216
120	0,144
201	0,0810
210	0,108
300	0,0270

Das Experiment der Aufgabe (a) besitzt 3 Ausprägungen. Um die angezeigten Sektoren im Urnenexperiment wiedererkennen zu können, erhalte „weiß" den Wert 1, „rot" den Wert 10 und schwarz den Wert „100". Die Anzahlen der entsprechenden Kugeln sind der Reihe nach 3, 4 und 3. Zur Simulation und zur Berechnung wird am eine Tabelle angelegt. Die angezeigten Werte lassen sich nun folgendermaßen interpretieren, Einerziffern der Wertangaben beschreiben das Eintreten von „weiß", die Zehnerziffern das Eintreten von „rot" und die Hunderterziffern das Eintreten von „schwarz" .
Somit liest man aus der nebenstehenden Tabelle ab:
A = {3, 30, 300}
B = {111}
P(A) = 0,270+0,0640+0,0270
P(B) = 0,216

Abb. 14 Urnenmodell zu Beispiel 3a

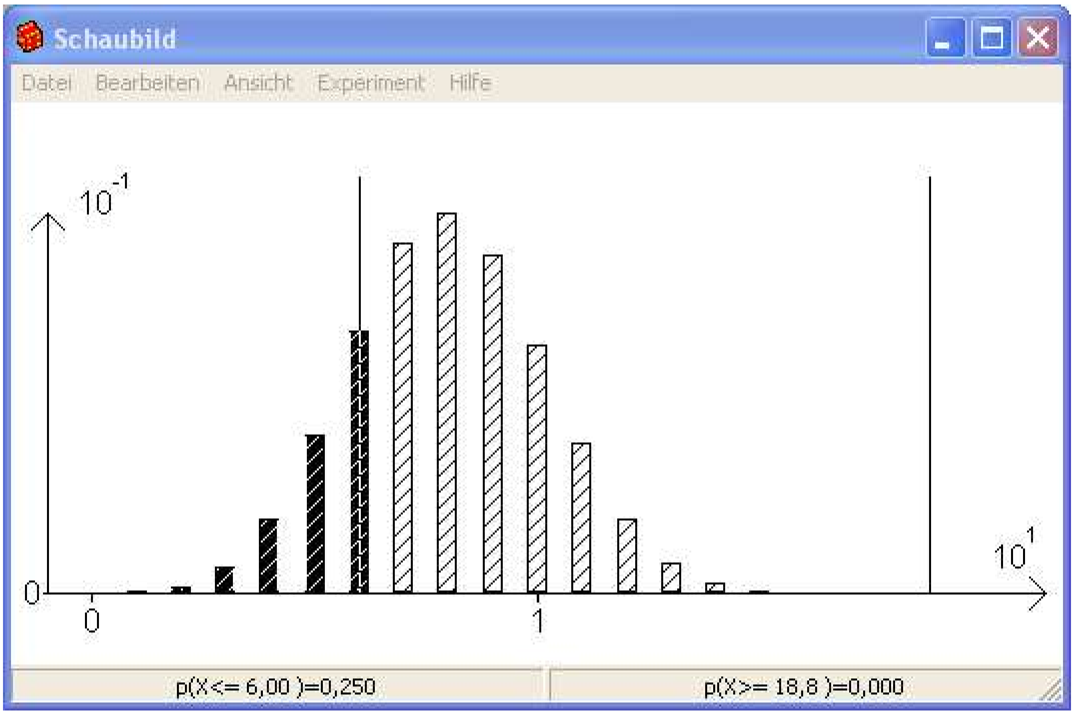


Abb. 15 Urnenmodell zu Beispiel 3b

Für die Aufgabe (b) kann das Glücksrad durch eine Urne mit roten und schwarzen Kugeln ersetzt werden. Wird dann die Verteilung als Balkendiagramm dargestellt, so lässt sich die Aufgabe auf eine interessante Weise lösen. Man wähle über das Menü "Experiment" die Option "Testen". Im Stabdiagramm werden links und rechts 2 dünne Stäbe eingeblendet (Abb. 15). Durch Anklicken und Ziehen bewege man den linken Stab bis auf den Balken "6". Gleichzeitig mit dem Ziehen wird im unteren Fensterteil die Wahrscheinlichkeit $P(X \leq k)$ berechnet und angezeigt. Weitere Ausführungen finden sich im Abschnitt Testen.

Beispiel 4

Ein Zufallsexperiment wird folgendermaßen beschrieben:
Es werden gleichzeitig 2 unterscheidbare Münzen geworfen. Die Ergebnismenge bestehe aus
$a_1 = 0$: keine der Münzen zeigt Zahl
$a_2 = 1$: genau eine der Münzen zeigt Zahl
$a_3 = 2$: beide Münzen zeigen Zahl
Man stelle durch eine Versuchsserie fest, ob die Laplace-Annahme für dieses Experiment gerechtfertigt ist.

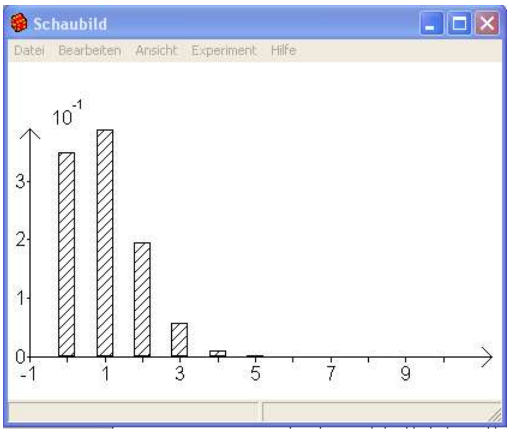
Schüler sind oft geneigt; Gleichwahrscheinlichkeit für das Eintreten der Elementarereignisse eines Zufallsexperiments anzunehmen, wo im Grunde genommen Vorsicht geboten ist.
Zum Simulieren dieser Versuchsserie kann man eine Urne wählen, die 2 Kugeln enthält. Die eine Kugel trägt die Ziffer 0, die andere die Ziffer 1. Um das Zufallsexperiment zu simulieren, wird zweimal mit Zurücklegen gezogen.
n-malige Simulationen (n = 50, 100,...) und beispielsweise eine grafische Darstellung der relativen Häufigkeiten in Abhängigkeit von n geben eine Antwort.

Die Binomialverteilung in Abhängigkeit von n und p:
(Demonstration im Unterricht, Zeitbedarf ca. 10 min)

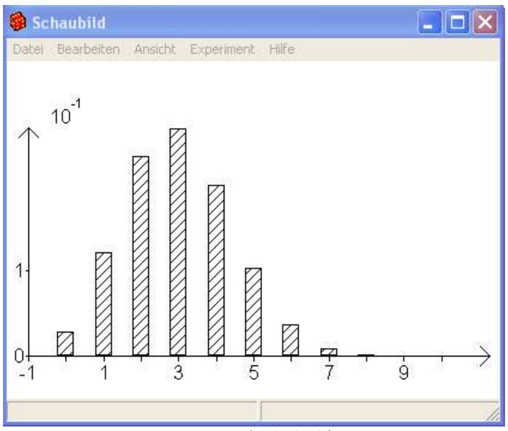
Die Binomialverteilung ist für p=0,5 symmetrisch. Je stärker p von 0,5 abweicht, desto asymmetrischer wird die Verteilung. Diese Asymmetrie tritt jedoch mit wachsendem n immer mehr zurück.

Aufgabe: Untersuchen Sie die Symmetrieeigenschaften einer $B_{10;p}$ -verteilten Zufallsvariablen in Abhängigkeit von n und von p.

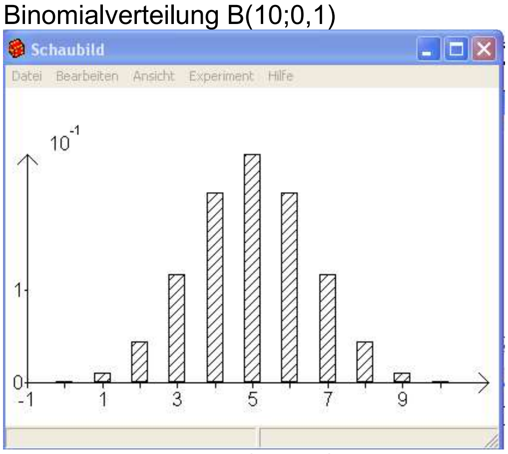
(Diese Untersuchung kann vor der Betrachtung der zugehörigen Formel zur Hinführung oder anschließend zur Verifikation des Sachverhalts durchgeführt werden.)



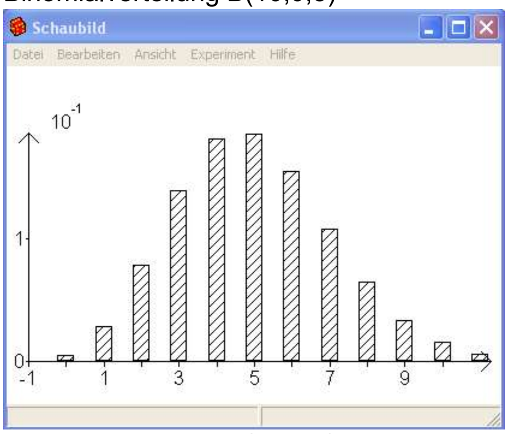
Binomialverteilung B(10;0,1)



Binomialverteilung B(10;0,3)



Binomialverteilung B(10;0,5)



Binomialverteilung B(50;0,1)

Bernoullisches Gesetz der großen Zahlen

Dieses mathematische Gesetz macht eine Aussage darüber, wie stark damit zu rechnen ist; dass die relative Häufigkeit, mit der das Ereignis A in einer Versuchsserie mit n Versuchen eintreten wird, innerhalb einer gewissen Bandbreite um den theoretischen Wert schwankt. Experimentell kann demonstriert werden, dass mit zunehmender Anzahl n der Simulationen das Schwankungsband der Breite 2ε immer seltener verlassen wird. Bei abnehmender Bandbreite kann ähnliches beobachtet werden, wenn man die Zahl n der Simulationen ausreichend erhöht.
Für das Experimentieren kann die früher erwähnte Würfelserie reproduziert werden. Man kann aber auch das Verteilen eines Skatspiels simulieren unter Beachtung des Ereignisses A: "Vorhand erhält keinen Buben". Als Modell für das Skatspiel dient wieder die Urne. Sie enthält 32 Kugeln, 4 schwarze für die Buben und 28 weiße für die restlichen Karten. 10-maliges Ziehen ohne Zurücklegen imitiert die zufällige Zuteilung von 10 Karten für Vorhand aus einem gut gemischten Skatblatt.
Denkbar ist, dass an jedem Schülerplatz eine Versuchsserie ausgeführt wird, bei der die relativen Häufigkeiten von A bei wachsender Zahl n von Simulationen ermittelt und notiert werden. Die Ergebnisse lassen sich hernach zusammentragen und grafisch darstellen (Abb 17).

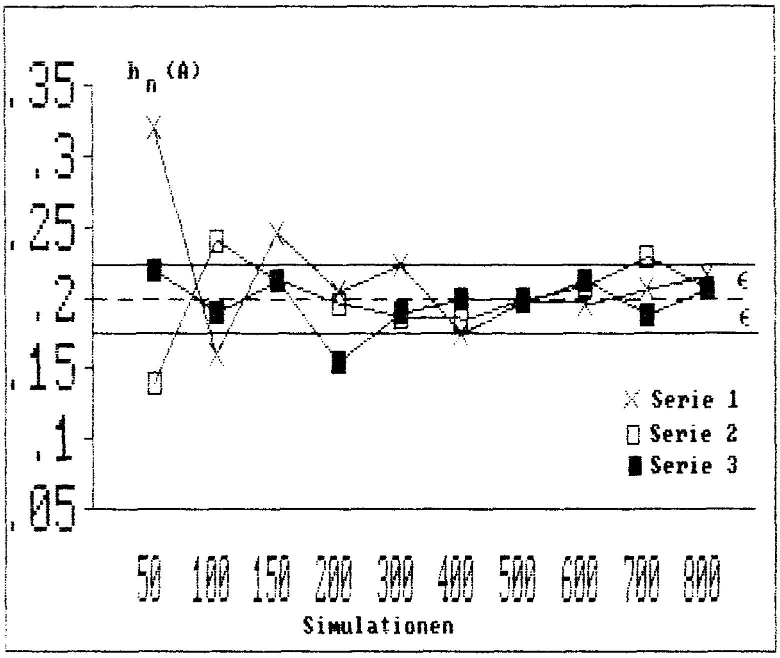


Abb. 17 Entwicklung der relativen Häufigkeit in Abh. Der Anzahl der Simulationen

Binomialverteilung und hypergeometrische Verteilung

Spätestens bei Materialtests kommt die Frage auf, welche Bedeutung die Unterscheidung von "Ziehen mit Zurücklegen" und "Ziehen ohne Zurücklegen" noch hat, wenn die Stichproben aus einer großen Grundmenge gezogen werden.
Mit einer Folge von Urnenexperimenten kann eine Antwort vermittelt werden.

Zum Beispiel enthalte eine Urne n Kugeln, rote und schwarze im Verhältnis 1:4. Bei allen nachfolgenden Experimenten werden jeweils k=10 Kugeln gezogen und die gezogenen roten gezählt:

In der Urne befinden sich zunächst 50 Kugeln; die Durchführung des Experiments bestehe aus "Ziehen mit Zurücklegen" und danach aus "Ziehen ohne Zurücklegen".
Die gleichen Experimente werden auch mit Urnen durchgeführt. die 100, 500 bzw. 1000 Kugeln enthalten.
Es ist lohnenswert, jeweils Grafiken bzw. Wertetabellen anzulegen. Man vergesse nicht, mittels der Option "Statistik" sich auch noch Erwartungswert, Varianz und Standardabweichung der dazugehörenden Verteilung geben zu lassen. Die Vergleiche sprechen deutlich für eine Konvergenz der hypergeometrischen Verteilung gegen die Binomialverteilung für großes n gegenüber kleinem k.

Tests an der Binomialverteilung

Fehler 1. Art

Bei Tests an der Binomialverteilung vergrößert man den Verwerfungsbereich so weit, bis die Wahrscheinlichkeit, mit der ein Wert in diesem Verwerfungsbereich liegt, gerade noch unter der vorgegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit a liegt. Die Berechnung dieser Wahrscheinlichkeit kann manuell erfolgen oder durch Addieren von Tabellenwerten. In jedem Fall muss man sich an den zulässigen Wert a für die Irrtumswahrscheinlichkeit herantasten. Dies ist ein experimenteller Vorgang, der am Computer sehr anschaulich vorgeführt werden kann und der dem Schüler hilft, das Prinzip eines Tests zu verstehen.
Das Programm kann mit Vorteil bei der Einführung der Tests eingesetzt werden. Hier wäre es durchaus auch möglich, die Schüler selbständig am Rechner arbeiten zu lassen, um sie - unter Vorgabe der Verteilung und der Irrtumswahrscheinlichkeit - den Verwerfungsbereich bestimmen zu lassen.

<u>Aufgabe:</u>
Bestimmen Sie den Ablehnungsbereich zu einer Binomialverteilung B(20;0.3) bei einem

- linksseitigen
- rechtsseitigen
- zweiseitigen Test

mit α=0,05.

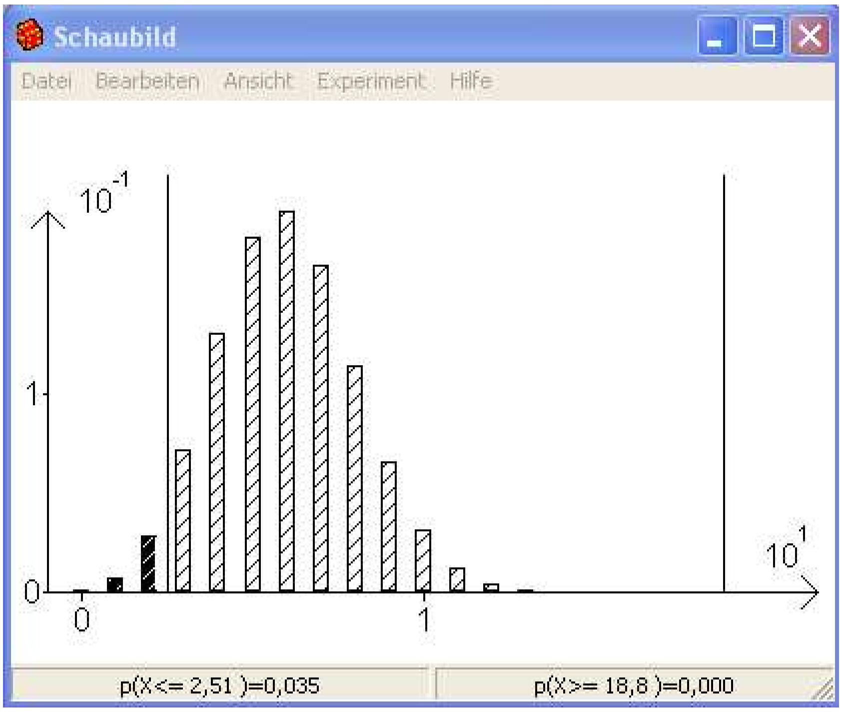


Abb.18: B(20;0,3), linksseitiger Test mit α=0,05 Verwerfungsbereich: V=(0,...,2}

In der linken unteren Ecke kann man die Irrtumswahrscheinlichkeit P(X <= 2) = 0.035 ablesen. Zieht man mit der Maus den Balken weiter nach rechts, so vergrößert sich die Irrtumswahrscheinlichkeit auf mehr als α=5%, verschiebt man den Balken nach links, so wird die Irrtumswahrscheinlichkeit kleiner als nötig.

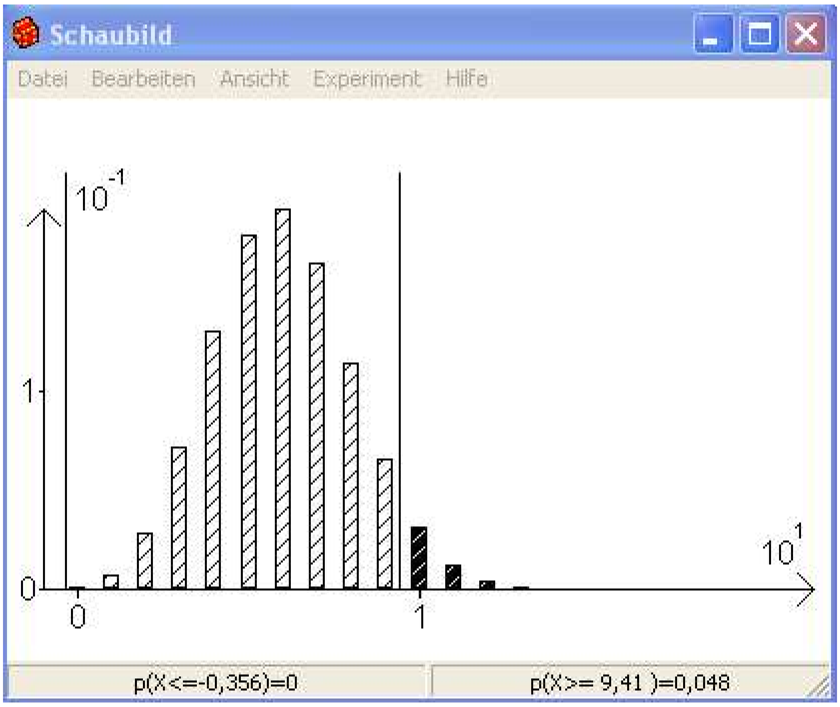


Abb.19: B(20;0.3), rechtsseitiger Test mit α=0,05 Verwerfungsbereich: V=(11,...,20}

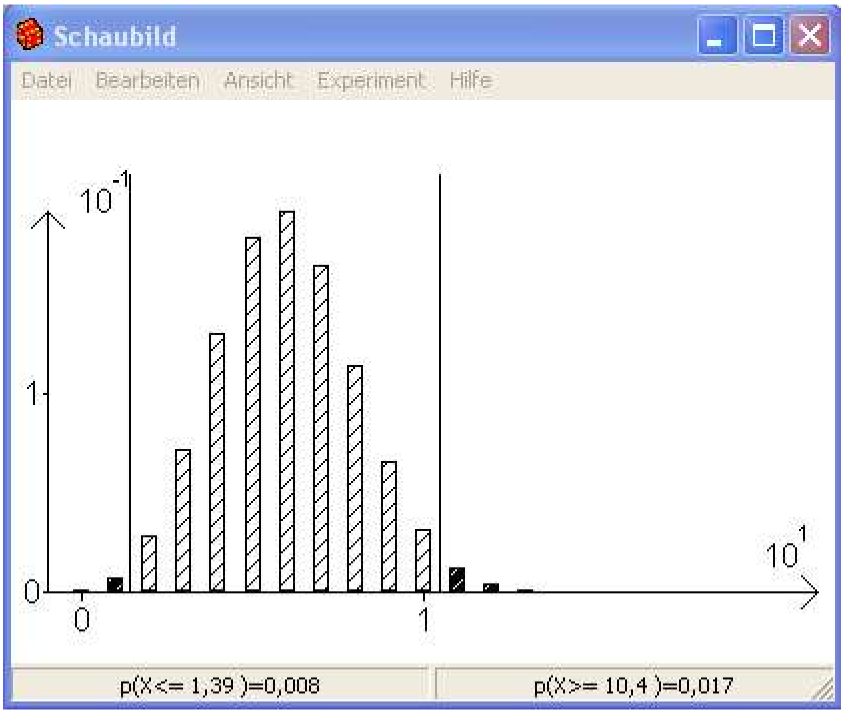


Abb. 20 Zweiseitiger Test mit α=0,05 Verwerfungsbereich: V=(0,1,11,...,20}

Fehler 2.Art

Am besten erstellt man zwei Fenster, bestimmt aus der gegebenen Irrtumswahrscheinlichkeit im oberen Fenster den Verwerfungsbereich und stellt dann im unteren Fenster bei der anderen Verteilung den anderen Grenzstrich mit der Maus auf die gleiche Position wie im darüberliegenden Fenster. Die Wahrscheinlichkeit des Verwerfungsbereichs bei dieser Verteilung entspricht dem Fehler 2. Art.
Demonstration oder Schülerarbeit (Zeitbedarf ca. 1/2 h)

<u>Aufgabe:</u>
Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich in einem linksseitigen Test an B(20;0,5) mit α=0,05.
Wie groß ist in diesem Fall der Fehler 2. Art, wenn die Zufallsvariable in Wirklichkeit B(20;0.3) verteilt ist?

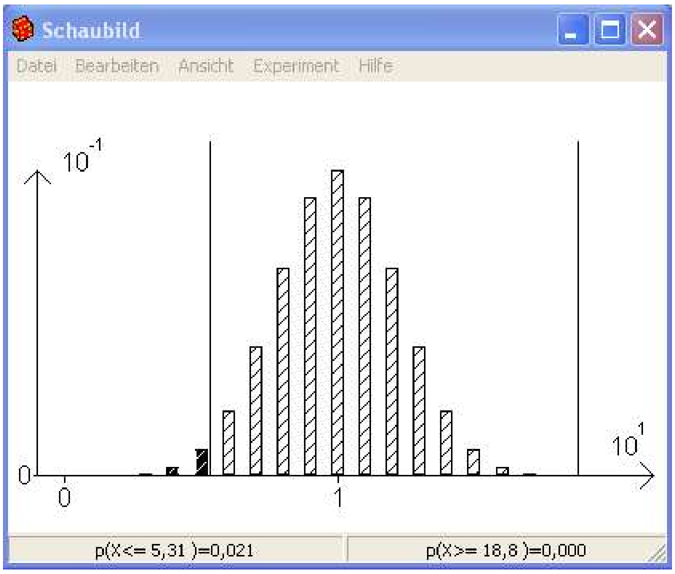


Abb. 21 Der linksseitige Test an B(20,0,05) mit α=0,05 ergibt den Verwerfungsbereich V {0,...,5}

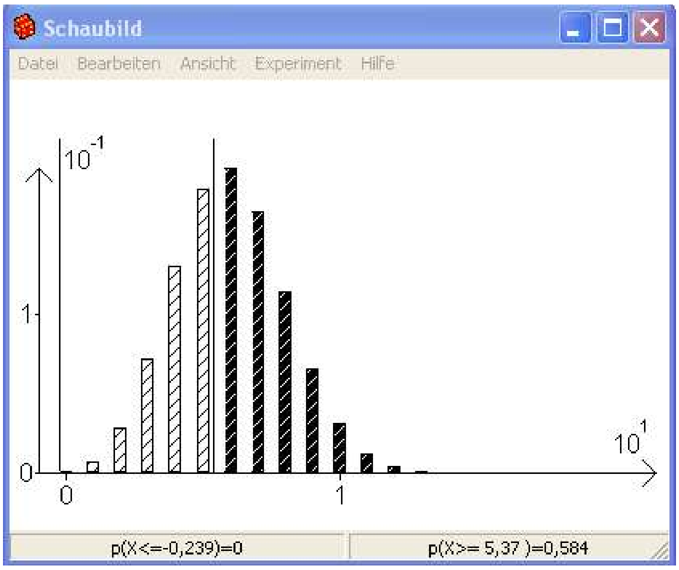


Abb. 22 Ein rechtsseitiger Test an B(20;0,3) liefert den Fehler 2.Art. Der rechte Balken wird auf die Position des linken Balkens in der oberen Abbildung festellt.
Mit P(x>=5,xx)=0,584 erhält man einen ß-Fehler von etwa 58%

Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung

Die Binomialverteilung wird für größere n zunehmend mühsamer zu berechnen, da immer mehr Summanden der Form $\binom{n}{k} p^k q^{n-k}$ berechnet, bzw. immer mehr Tabellenwerte nachgeschlagen und addiert werden müssen. In den mathematischen Tafeln sind außerdem nur relativ wenige Werte für bestimmte n und p vorgegeben. Bei dieser Arbeit ist der Einsatz eines Computers von großem Vorteil, man könnte damit sogar generell auf die näherungsweise Berechnung von Binomialverteilungen mit Hilfe der Normalverteilung verzichten Unabhängig davon ist es wichtig, den Schülern diesen Zusammenhang zwischen Binomial- und Normalverteilung zu vermitteln. Die Abbildung der Gaußfunktion auf eine binomialverteilte Wahrscheinlichkeitsverteilung macht dabei einige Schwierigkeiten, da die Wahl der Parameter den Schülern nicht einleuchtend ist.

(Mit Hilfe des Programms "Stochastik" kann der Lehrer diese Annäherung unter Mitarbeit der Schüler demonstrieren oder er geht mit ihnen in den Informatikraum und lässt sie das Ergebnis mit Hilfe eines Arbeitsblatts (siehe Anhang) selbst finden. Zeitbedarf ca. 1 h).

Die Gaußsche Glockenfunktion phi mit

$$phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5(x-\mu)^2}$$

(„Stochastik“--Schreibweise: phi(x) = normal(x))

soll auf die Binomialverteilung B(n,p) abgebildet werden.
Dazu muss die Gaußsche Glockenkurve um μ nach rechts verschoben werden.
(„Stochastik“-Schreibweise: phi(x) = normal(x-μ))
Das Ergebnis kann experimentell oder durch Überlegen gefunden werden. Dieser erste Schritt ist den Schülern meistens noch einleuchtend.
Die Gaußkurve wird zusammen mit der Binomialverteilung in ein gemeinsames Fenster gezeichnet. Dabei ist darauf zu achten, dass man die Funktionswerte der Gaußfunktion im richtigen Bereich berechnet. Wenn nötig, muss man das Koordinatensystem eventuell anpassen, damit beide Verteilungen im Koordinatensystem Platz finden.
Durch Überlegen und Probieren kommt man zu einer Dichtefunktion, die die Binomialverteilung sehr gut annähert. Nun vergleicht man die so erhaltene Verteilungsfunktion mit den Parametern μ und σ der Binomialverteilung und kommt leicht zum Schluss, dass die Dichtefunktion

$$phi(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-0,5(x-\mu)^2}{\sigma}}$$

(Laplace-Schreibweise: phi(x) = normal((x-μ)/sqrt(npq))/sqrt(npq)) die gesuchte Näherungsfunktion ist. Diese Art, das Ergebnis zu finden, ist wesentlich sinnvoller und lehrreicher als das bloße Suggerieren der Lösung durch den Lehrer. Das Programm liefert allerdings nur eine Bestätigung der lokalen Näherungsformel von Moivre, nicht jedoch der globalen Näherungsformel.

Aufgabe:
Annäherung der Binomialverteilung B(50;0,4) durch die Gaußfunktion. Die Abbildungen zeigen die wesentlichen Zwischenschritte.

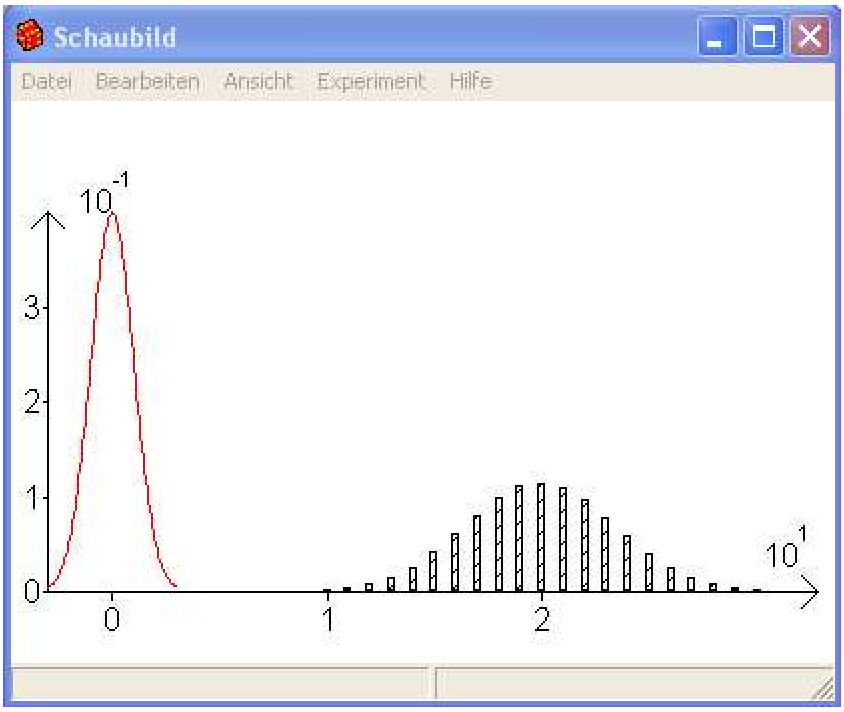


Abb.23: Binomialverteilung B(50;0,4) und p(x) = normal(x) (Gaußfunktion) berechnet: von: -3 bis: 3
Einstellung: Koordinatenbereich: von: -3 bis: 32

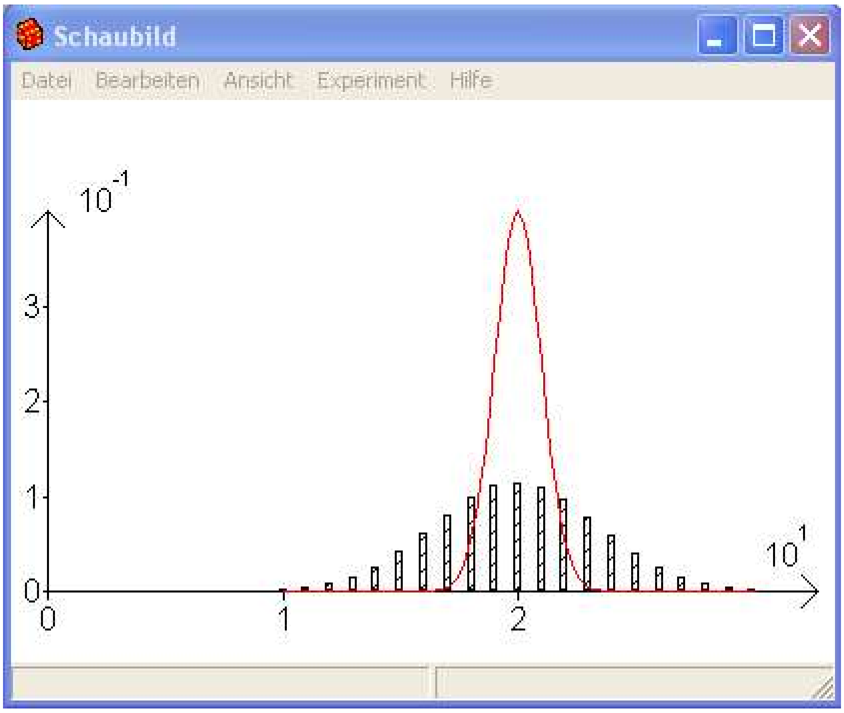


Abb.24: Binomialverteilung B(50;0,4) und p(x) = normal(x-20) (Gaußfunktion)
berechnet: von: 10 bis: 30
Einstellung: Koordinatenbereich: von: 0 bis: 32

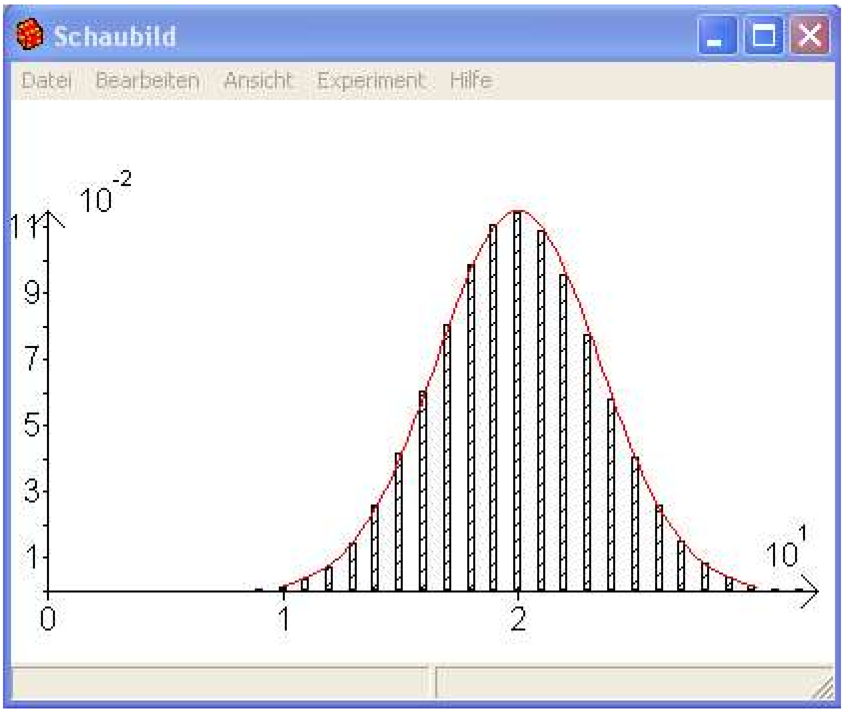


Abb.25: Binomialverteilung B(50;0,4) und p(x) = normal((x-20)/sqrt(12))/sqrt(12) (Gaußfunktion)
berechnet: von: 10 bis: 30
Einstellung: Koordinatenbereich: von: 0 bis: 32

Aufgabe:
Versuchen Sie, die Gaußkurve durch das Schaubild einer rationalen Funktion mit der Gleichung

$$phi_{a,t,k}(x) = \frac{t}{(x+a)^2 + k}$$

anzunähern.

Die Fläche unter der Kurve sollte das 'Maß' 1 haben. Dies kann man durch einen Test untersuchen, bei dem man den Balken über die ganze Glockenkurve zieht.

Der zentrale Grenzwertsatz

Wie im letzten Abschnitt gezeigt, lassen sich Binomialverteilungen unter gewissen Voraussetzungen (n muss hinreichend groß sein) durch die Normalverteilung annähern. Man erhält jedoch nicht nur im Falle einer Bernoulli-Kette eine glockenförmige Verteilung, sondern auch, wenn man andere, unabhängige Zufallsexperimente hinreichend oft ausführt und die Ergebnisse addiert.
Der Computer wird bei der Einführung des zentralen Grenzwertsatzes zur Demonstration eingesetzt. Er ermöglicht es, dass man den Schülern mehrere Beispiele mit unterschiedlichen Ausgangsverteilungen vorstellt. Erst dadurch lässt sich die zentrale Aussage dieses Satzes erfassen. (Zeitbedarf ca. 1 h)

Aufgabe: Berechnen sie die Augensumme beim wiederholten Werfen eines idealen Tetraeders, dessen Seiten die Zahlen 0, 1, 2, 3 zeigen.

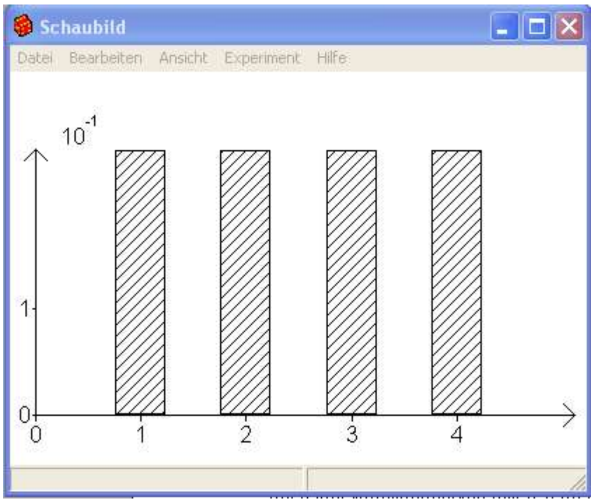


Abb.26 Ideales Tetraeder (p=0,25) 1 Ziehung berechnet.

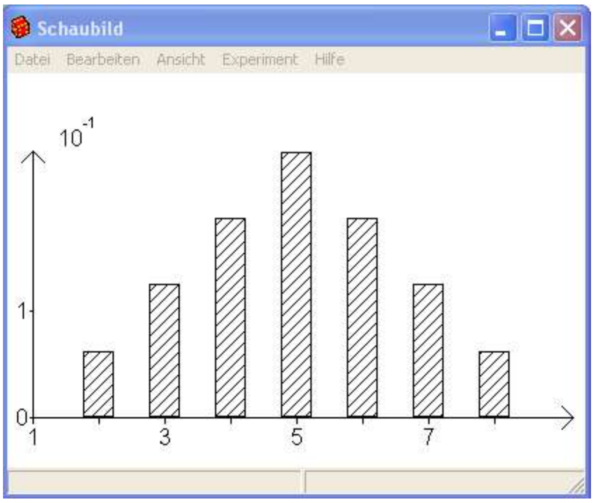


Abb.27 Ideales Tetraeder (p=0,25) 2 Ziehungen berechnet.

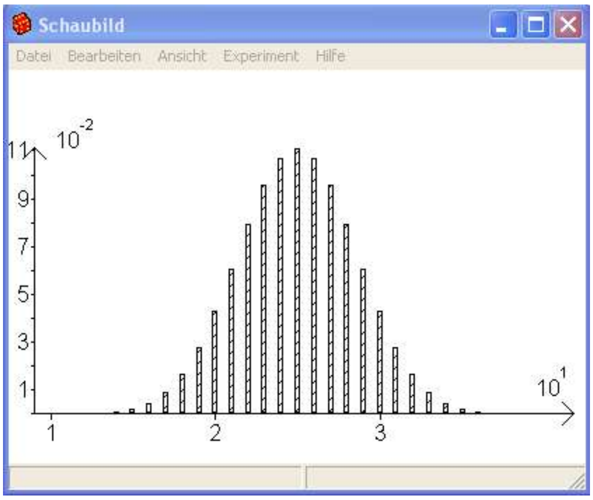


Abb.28 Ideales Tetraeder (p=0,25) 10 Ziehungen berechnet.

Test an der Normalverteilung

Auch an einer stetigen Verteilungsfunktion können Tests durchgeführt werden. Das Vorgehen ist das gleiche wie bei den Tests an der Binomialverteilung. Der einzige Unterschied ist die kontinuierliche Veränderung der Wahrscheinlichkeitswerte.
(Einsatz bei der Einführung der Tests an der Normalverteilung, Zeitbedarf ca. 1 h)

Aufgabe:
Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich zu einem zweiseitigen Test an der normierten Normalverteilung mit α = 0,05.

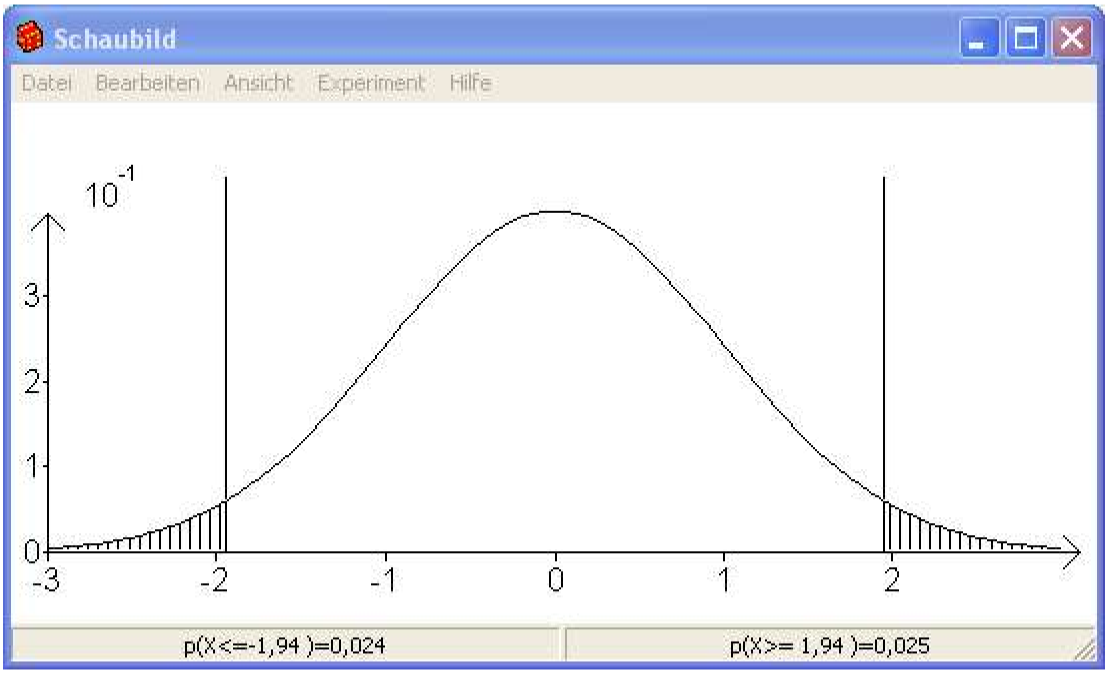


Abb.29: zweiseitiger Test an N(0;1) mit α = 0,05 liefert den Verwerfungsbereich:
V = {x | x<= -1,94 v x >= 1,94}

Überprüfung von Testergebnissen

Beim Arbeiten mit Tests ergeben sich signifikante Unterschiede zwischen der Praxis und dem, was man in der Schule macht.
Im Unterricht liegt die Hauptarbeit im Testentwurf, d.h. man legt den Verwerfungsbereich fest und hat dann meistens das Ergebnis einer einzigen Stichprobe vorliegen, aufgrund deren man sich für oder gegen die Nullhypothese entscheiden muss. Im Gegensatz zur Praxis, wo das Entnehmen von Stichproben die Hauptarbeit beim Testen ist, ist dies in der Schule aus Zeitgründen praktisch unmöglich. Deshalb wird dem Schüler das Wesen der Irrtumswahrscheinlichkeit nur schwer klar.
Statt dem Schüler nun mit vielen Worten zu erklären, welche Bedeutung das Risiko 1.Art hat, und wie es sich auswirkt, kann man mit "Stochastik" Stichproben simulieren.

Aufgabe:
Bestimmen Sie den Verwerfungsbereich bei einem linksseitigen Test an B(10;0,4) mit α=0,05. Simulieren Sie das Ziehen von Stichproben und entscheiden Sie, zu welcher Reaktion das Ergebnis der Stichprobe(n) führen würde.

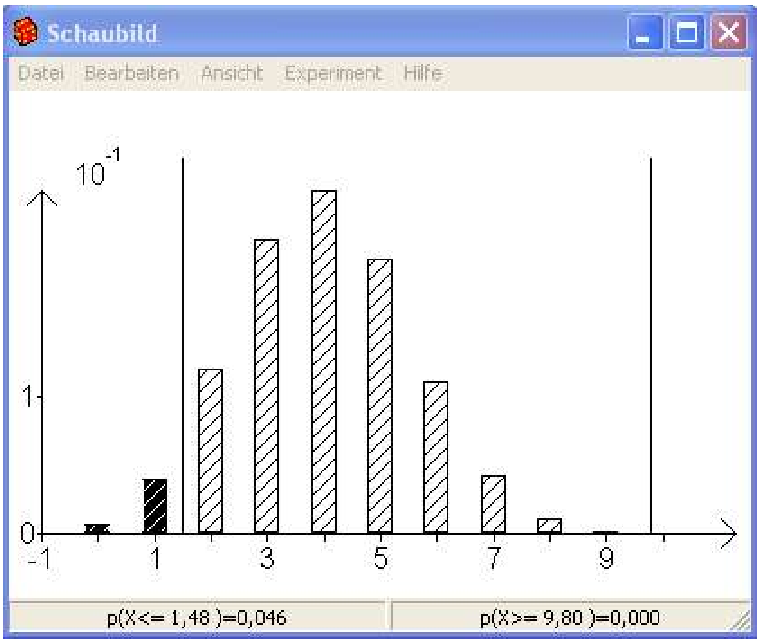


Abb.30: B(10;0,4); α = 0,05
Der Test liefert den Verwerfungsbereich V = {0, 1} mit α_{exakt} = 0,046.

Während man dieses Diagramm in der oberen Bildschirmhälfte stehen lässt, überträgt man das Zufallsexperiment in das untere, gleich breite Fenster und ändert das Eingabefeld: 'Simulationen' auf den Wert 1. Dadurch wird das Entnehmen einzelner Stichproben simuliert. Im Schaubild ergibt sich jeweils ein Stab, dessen Lage darüber entscheidet, ob die Nullhypothese ($p=p_0$) akzeptiert oder verworfen wird. Wie auf das Stichprobenergebnis zu reagieren ist, sollen die Schüler selbst entscheiden.

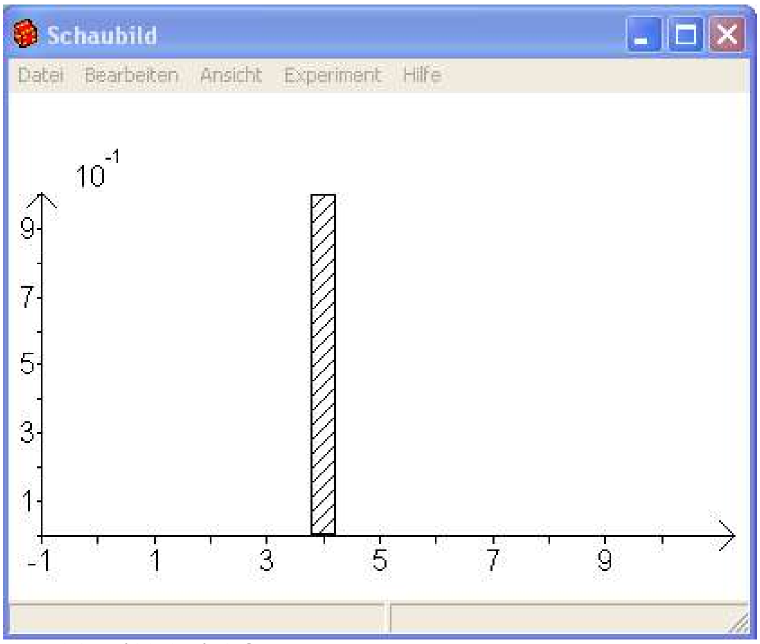


Abb.31: B(10;0,4) 1 Simulation
Bei diesem Stichprobenergebnis würde die Nullhypothese akzeptiert, da 4 nicht im Verwerfungsbereich ist.

Man müsste dieses Experiment ('Ziehen einer Stichprobe') im Mittel 100mal durchführen, um 5 Stichproben zu erhalten, die zur Ablehnung der Nullhypothese (p=0,4) führen würden.
Um diese mühsame Arbeit zu vereinfachen, stellt man die Anzahl der Simulationen auf einen größeren Wert (z.B. 100) ein und bringt den Testbalken im zugehörigen Schaubild an dieselbe Stelle wie beim Entwurf des Tests. Aus der angezeigten Wahrscheinlichkeit (eigentlich ist es eine relative Häufigkeit) ergibt sich durch Multiplikation mit n die Anzahl der Entscheidungen gegen die Nullhypothese.

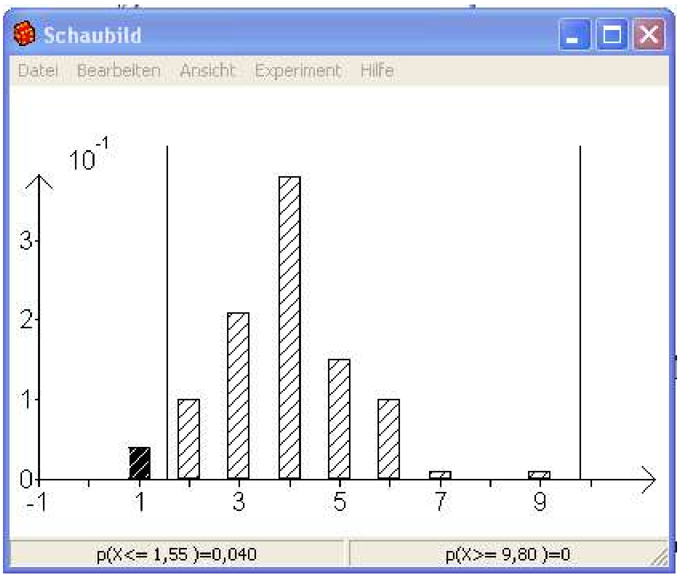


Abb.32: B(10;0,4), 100 Simulationen, Testbalken zwischen 1 und 2 p(x <= 1,xx) = 0.040 d.h. von den 100 Stichproben hatten 4 ein Ergebnis, das zu einer Verwerfung der Nullhypothese führen würde. Dies ist etwas weniger als der theoretische Wert (a=0,046). Durch Wiederholen dieses Experiments kann man zeigen, dass Abweichungen nach oben wie nach unten möglich sind.
Dieses überprüfen von Testergebnissen funktioniert natürlich auch bei Tests an der Normalverteilung und bei zweiseitigen Tests. Das Programm eignet sich damit sehr gut dafür, den Schülern die Bedeutung der Irrtumswahrscheinlichkeit klar zu machen.

Arbeitsblatt MOIVRE

Annäherung der Binomialverteilung durch die Normalverteilung:

Definieren Sie die Experimente NORMAL und BIN05004:

EXPERIMENT/NEU/stetig
Name : NORMAL
p(x) = normal(x)
von x = -3 bis x = 3

EXPERIMENT/NEU/diskret (nicht löschen)
Name: BIN05004
Zufallsexperiment
Variable mit 2 Werten
x = 0 p = 0,6
x = 1 p = 0,4
Ziehungen: 50
Berechnete Wahrscheinlichkeit

Damit beide Schaubilder auf dem Bildschirm dargestellt werden, wählt man Ansicht/Koordinatensystem und x von -3, x bis 32

Bei der Dichtefunktion NORMAL handelt es sich um die normierte Normalverteilung (Gaußsche Glockenkurve). Ihre Funktionsgleichung ist die Gaußsche Glockenfunktion phi mit

$$phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-0,5(x-\mu)^2}$$

Bei BIN05004 handelt es sich um die Binomialverteilung B(50;0.4).

Durch Verschieben und Strecken soll die Normalverteilung so manipuliert werden, dass sie eine möglichst gute Hüllenkurve der Binomialverteilung darstellt.
Dazu läßt sich die Normalverteilung folgendermaßen beeinflussen:

normal(x-a)	Verschiebung in x-Richtung
normal(x/b):	dehnt oder staucht die Kurve in x-Richtung
1/c*normal(x) :	Multiplikation der y-Werte mit 1/c (Dehnung oder Stauchung in y-Richtung)

Das Ergebnis sollte die Form 1/c*normal((x-a)/b) haben. Welcher Zusammenhang scheint zwischen den Werten a,b und c und den Parametern μ und σ der Binomialverteilung (diese kann man im Menü: EXPERIMENT/STATISTIK erhalten) zu bestehen?

Durch Überlagerung weiterer Binomialverteilungen, z.B. B(50;0.8), B(100;0.2), B(100;0.6) durch die Normalverteilung, soll die Vermutung überprüft werden.

Versuchen Sie, die Gaußkurve durch das Schaubild einer rationalen Funktion mit der Gleichung

$$phi_{a,t,k}(x) = \frac{t}{(x+a)^2 + k}$$

anzunähern. Die Fläche unter der Kurve sollte das 'Maß' 1 haben. Dies kann man durch einen Test versuchen, bei dem man den Balken über die ganze Glockenkurve zieht.